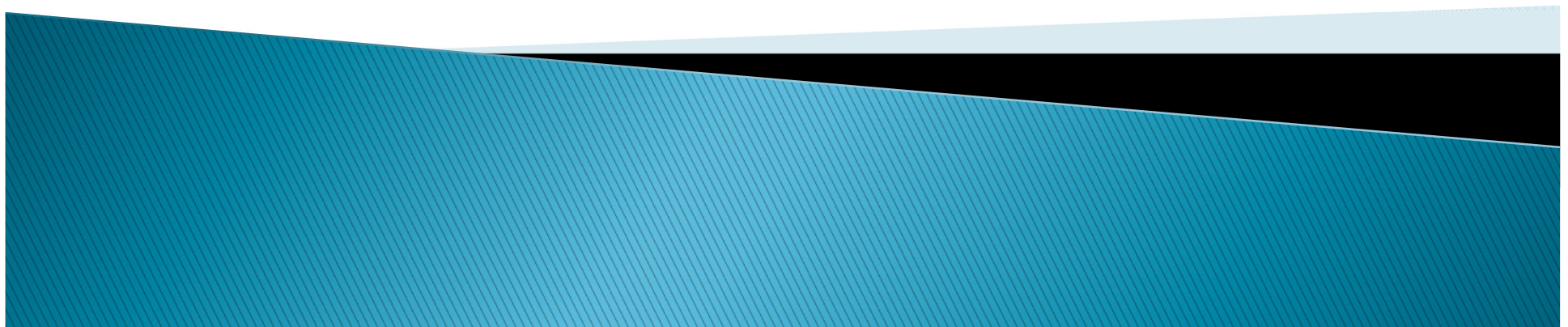


Betrachtungen diskreter Modelle – Differenzengleichungen mittels Technologie (GeoGebra)

Mag. Christian Schreiner
AG-Tagung, St. Pölten, 6.3.2019



Differenzengleichungen

Grundkompetenz

Änderungsmaße

- ▶ AN 1.4 Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben und diese im Kontext deuten können.

Lineare Differenzengleichung

Bezeichnet y_n den Bestand einer Größe nach n Zeiteinheiten und ist y_0 gegeben, dann nennt man eine Gleichung der Form $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$ ($a \neq 0$) eine lineare Differenzengleichung.

Lineare Differenzengleichung

- ▶ Die Bestandsgröße y wird in diskreten Zeitschritten betrachtet.
- ▶ y_0 ist der Bestand zu Beginn (die Angabe der Anfangsbedingung ist unbedingt notwendig).
- ▶ y_1 ist der Bestand nach einer Zeiteinheit usw.
- ▶ $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$ ist eine rekursive Darstellung der Folge y_n .

Lineare Differenzengleichung

- ▶ $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$ kann auf die Form $y_{n+1} - y_n = T(y_n)$ gebracht werden, wobei $T(y_n)$ ein Term in Abhängigkeit von y_n ist.
- ▶ Die explizite Darstellung von y wird Lösung der Differenzengleichung genannt.

Differenzengleichungen

Diskrete Modelle

- ▶ Diskretes lineares Modell
- ▶ Diskretes exponentielles Modell
- ▶ Diskretes beschränktes Modell

Diskretes lineares Modell

$$y_{n+1} = y_n + b \quad (a=1)$$

Das lineare Modell ist durch die lineare Differenzengleichung $y_{n+1} = y_n + b$ und den Anfangswert y_0 festgelegt.

$y_{n+1} - y_n = b$ beschreibt die absolute Änderung des Bestands zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten.

Für die explizite Darstellung gilt:

$$y_n = y_0 + n \cdot k \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Diskretes lineares Modell

Explizite Darstellung: $y_n = y_0 + n \cdot k$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$y_0$$

$$y_1 = y_0 + b$$

$$y_2 = y_1 + b = y_0 + b + b = y_0 + 2 \cdot b$$

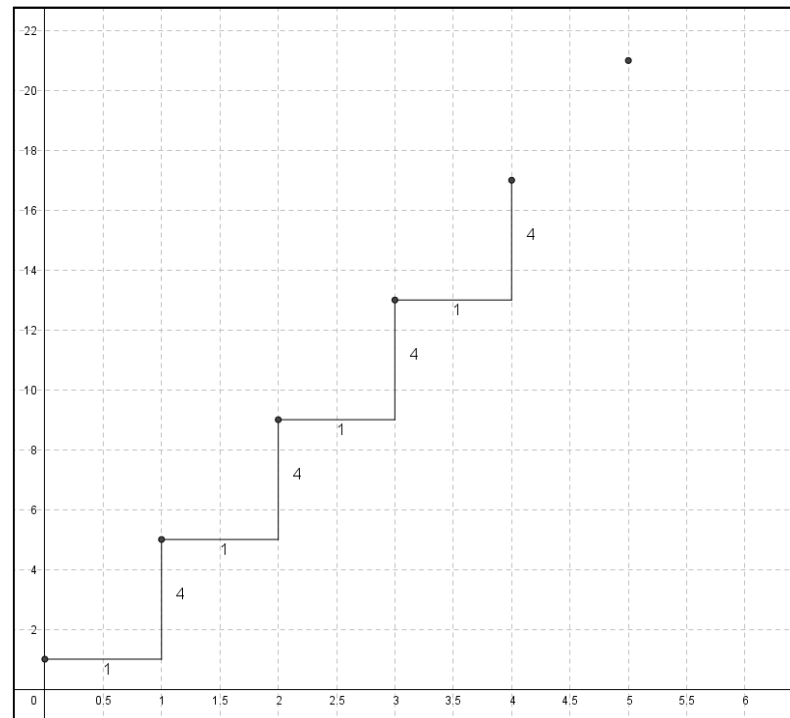
$$y_3 = y_2 + b = y_0 + 2 \cdot b + b = y_0 + 3 \cdot b$$

$$y_4 = y_3 + b = y_0 + 3 \cdot b + b = y_0 + 4 \cdot b$$

...

$$y_n = y_{n-1} + b = y_0 + (n - 1) \cdot b + b = y_0 + n \cdot b$$

Diskretes lineares Modell



Diskretes exponentielles Modell

$$y_{n+1} = a \cdot y_n \quad (a > 0, b = 0)$$

Das exponentielle Modell ist durch die lineare Differenzengleichung $y_{n+1} = a \cdot y_n$ und den Anfangswert y_0 festgelegt.

$y_{n+1} - y_n = (a - 1) \cdot y_n$, d.h. die Differenz $y_{n+1} - y_n$ ist direkt proportional zu y_n mit dem Proportionalitätsfaktor $(a - 1)$.

Für die explizite Darstellung gilt:

$$y_n = a^n \cdot y_0 \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Diskretes exponentielles Modell

Explizite Darstellung: $y_n = a^n \cdot y_0$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$y_0$$

$$y_1 = a \cdot y_0$$

$$y_2 = a \cdot y_1 = a \cdot a \cdot y_0 = a^2 \cdot y_0$$

$$y_3 = a \cdot y_2 = a \cdot a^2 \cdot y_0 = a^3 \cdot y_0$$

$$y_4 = a \cdot y_3 = a \cdot a^3 \cdot y_0 = a^4 \cdot y_0$$

...

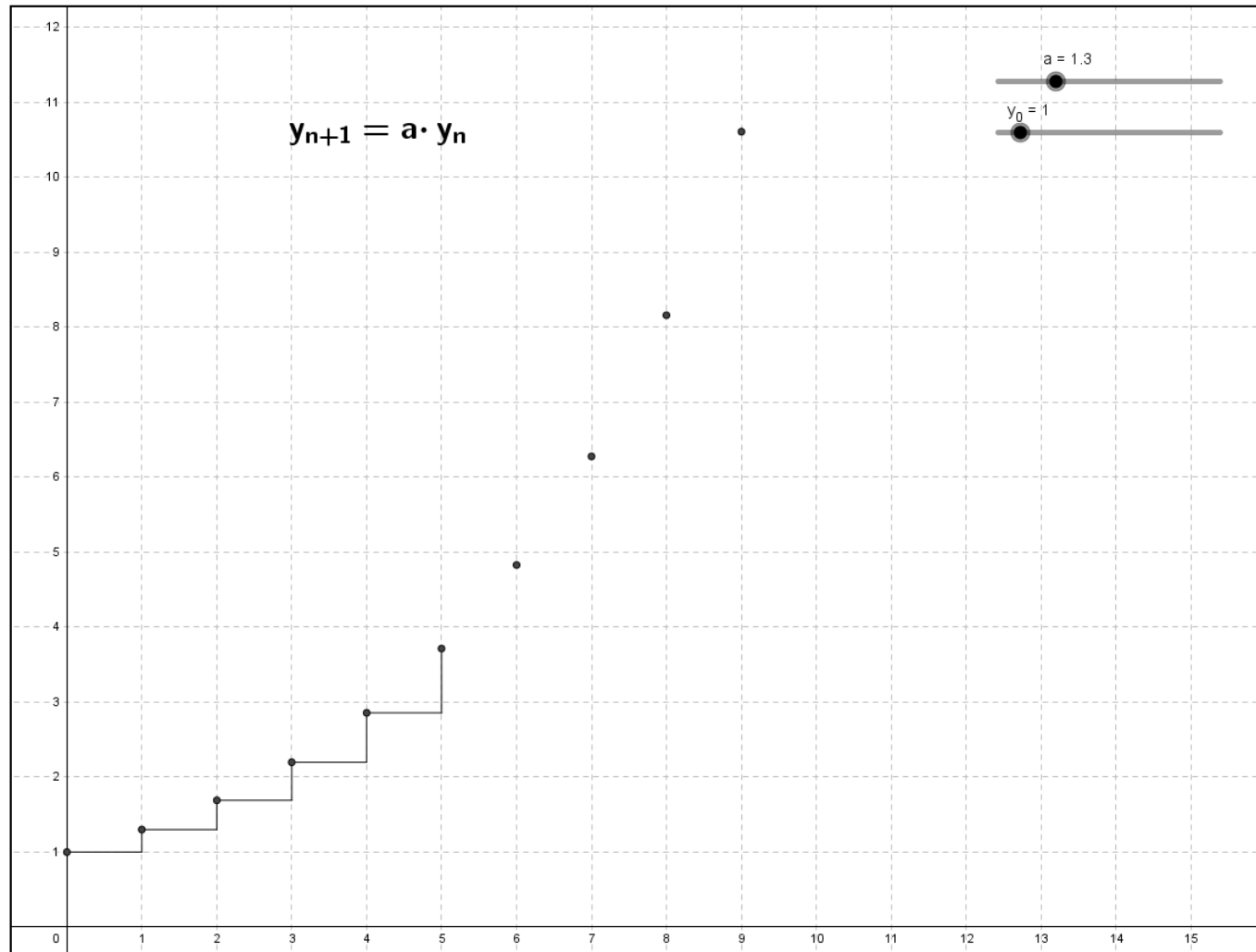
$$y_n = a \cdot y_{n-1} = a \cdot a^{n-1} \cdot y_0 = a^n \cdot y_0$$

Diskretes exponentielles Modell

$$y_{n+1} = a \cdot y_n \quad (b=0)$$

- ▶ Ist $a > 1$: exponentielle Zunahme
- ▶ Ist $0 < a < 1$: exponentielle Abnahme

Diskretes exponentielles Modell



Weiteres diskretes Modelle

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b \quad (a > 0, b \neq 0)$$

Explizite Darstellung einer linearen Differenzengleichung

Die explizite Form einer linearen Differenzengleichung $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$ mit dem Anfangswert y_0 ist gegeben durch:

$$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Weiteres diskretes Modell

Explizite Darstellung: $y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$

$$y_0$$

$$y_1 = a \cdot y_0 + b$$

$$y_2 = a \cdot y_1 + b = a \cdot (a \cdot y_0 + b) + b = a^2 \cdot y_0 + a \cdot b + b$$

$$y_3 = a \cdot y_2 + b = a \cdot (a^2 \cdot y_0 + a \cdot b + b) + b = \\ = a^3 \cdot y_0 + a^2 \cdot b + a \cdot b + b$$

...

$$y_n = a^n \cdot y_0 + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b + \dots + a \cdot b + b = \\ = a^n \cdot y_0 + b \cdot \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)}_{\frac{1-a^n}{1-a}} = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a}$$

(Summenformel für geometrische Reihen)

Weiteres diskretes Modell

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b \quad (a > 0, b \neq 0)$$

Ein Raucher, der jede Stunde eine Zigarette raucht, führt mit jeder Zigarette seinem Körper eine Nikotinmenge von 0,8 mg zu. Andererseits wird stündlich etwa 30 % des im Blut vorhandenen Nikotins abgebaut. Zu Beginn sei im Blut kein Nikotin enthalten.

$$y_{n+1} = 0,7 \cdot y_n + 0,8$$

Weiteres diskretes Modell

- Berechnen Sie den Nikotingehalt nach der zweiten, dritten, n-ten Stunde bzw. Zigarette!

$$y_0$$

$$y_1 = 0,7 \cdot y_0 + 0,8$$

$$y_2 = 0,7 \cdot y_1 + 0,8 = 0,7 \cdot (0,7 \cdot y_0 + 0,8) + 0,8 = 0,7^2 \cdot y_0 + 0,7 \cdot 0,8 + 0,8$$

$$y_3 = 0,7 \cdot y_2 + 0,8 = 0,7 \cdot (0,7^2 \cdot y_0 + 0,7 \cdot 0,8 + 0,8) + 0,8 = \\ = 0,7^3 \cdot y_0 + 0,7^2 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,8 + 0,8$$

...

$$y_n = 0,7^n \cdot y_0 + 0,7^{n-1} \cdot 0,8 + 0,7^{n-2} \cdot 0,8 + \dots + 0,7 \cdot 0,8 + 0,8 =$$

$$= 0,7^n \cdot y_0 + 0,8 \cdot \underbrace{(0,7^{n-1} + 0,7^{n-2} + \dots + 0,7 + 1)}_{\frac{1-0,7^n}{1-0,7}} = 0,7^n \cdot y_0 + 0,8 \cdot \frac{1-0,7^n}{1-0,7}$$

$$\frac{1-0,7^n}{1-0,7} \quad (\text{Summenformel für geometrische Reihen})$$

Weiteres diskretes Modell

- Berechnen Sie den Nikotingehalt nach der zweiten, dritten, n-ten Stunde bzw. Zigarette!

$$\begin{aligned}y_n &= 0,7^n \cdot y_0 + 0,8 \cdot \frac{1-0,7^n}{1-0,7} = \\&= 0,7^n \cdot y_0 + \frac{8}{3} \cdot (1 - 0,7^n) = \\&= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cdot 0,7^n \text{ (wegen } y_0 = 0\text{)}\end{aligned}$$

Weiteres diskretes Modell

- ▶ Zeigen Sie, dass der Nikotingehalt im Blut insgesamt steigt (d.h. der Körper kommt mit dem Abbauen nicht nach)!

Da $y_0 = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,7^n = 0$ und $\langle 0,7^n \rangle$ monoton fallend ist, ist die Folge $\langle y_n \rangle$ monoton wachsend.

Weiteres diskretes Modell

- ▶ 2 mg Nikotin im Blut ist ein gefährlicher Schwellenwert (da beginnen andere, sehr schädliche chemische Prozesse). Wird (bei diesem Rauchverhalten) dieser Wert jemals erreicht oder sogar überstiegen?

$$2 \leq \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cdot 0,7^n \Leftrightarrow n \geq \frac{\lg \frac{1}{4}}{\lg 0,7} = 3,89$$

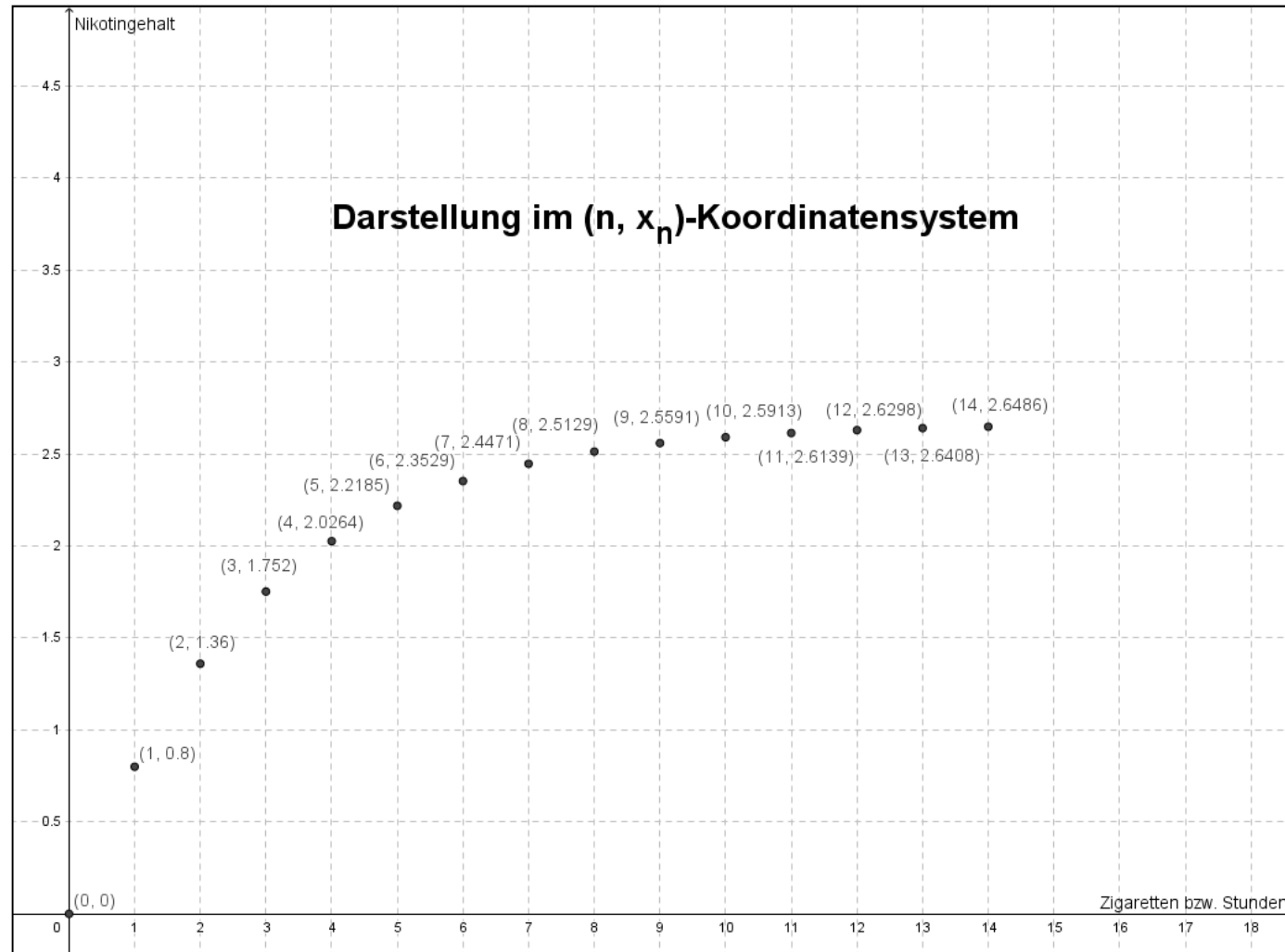
Weiteres diskretes Modell

- ▶ Gibt es einen Grenzwert, bei dem ebenso viel abgebaut wie zugeführt wird?

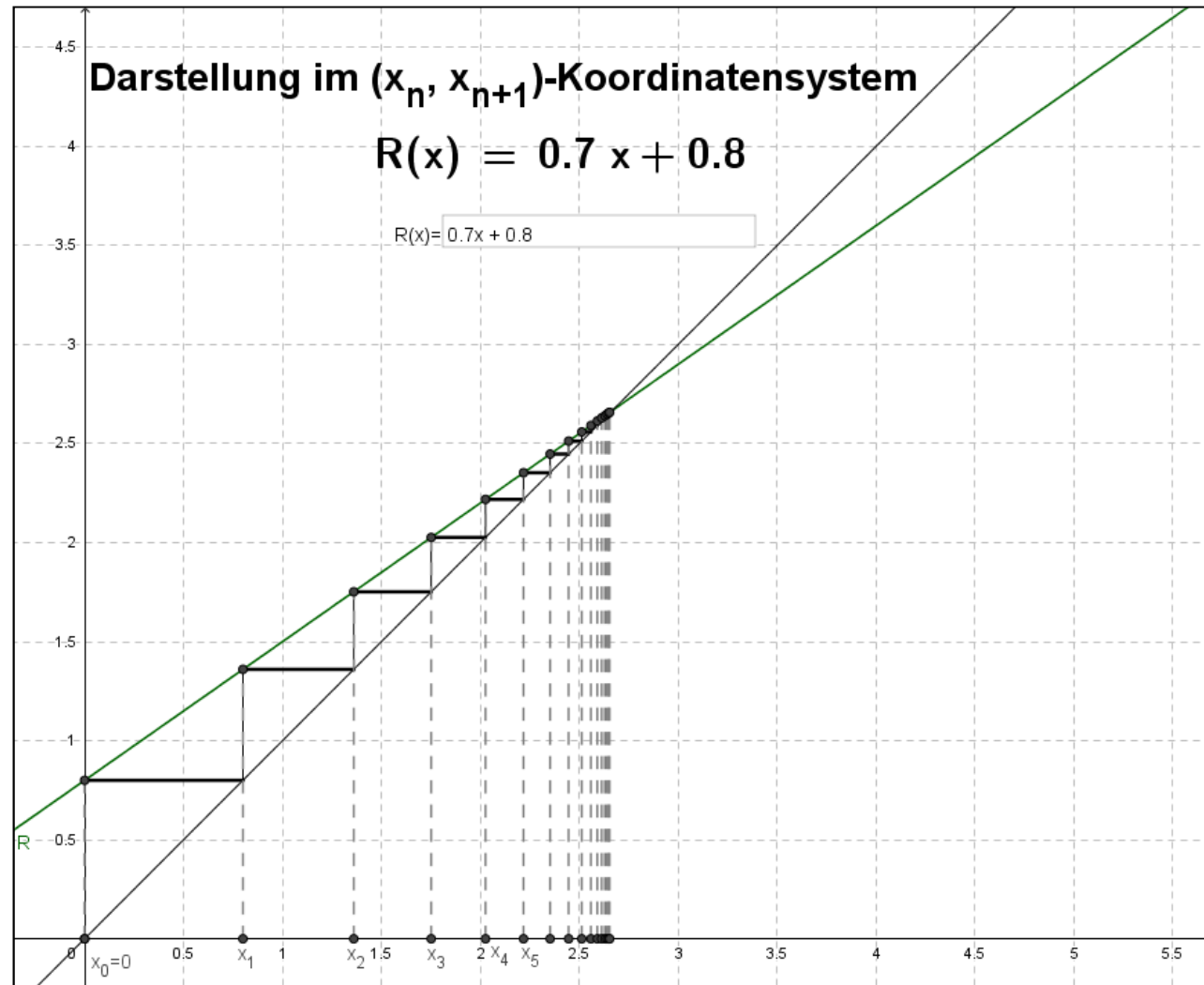
$$\bar{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cdot 0,7^n \right) = \frac{8}{3}$$

(weil $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,7^n = 0$)

Weiteres diskretes Modell



Weiteres diskretes Modell



Weiteres diskretes Modell

Ein Bauherr nimmt bei einer Bank ein Darlehen zu 1.000.000 € auf, das er in Jahresraten von 200.000 € abzahlen will, wobei die Jahresrate immer am Ende des Jahres bezahlt werden soll. Der jeweils offene Restbetrag wird mit 5 % p.a. verzinst.

Weiteres diskretes Modell

- ▶ Wie lautet die Tilgungsgleichung, die den Prozess beschreibt?

$$y_{n+1} = 1,05 \cdot y_n - 200000$$

- ▶ Wie lange muss der Bauherr Raten zahlen, und wie hoch ist die letzte Rate?

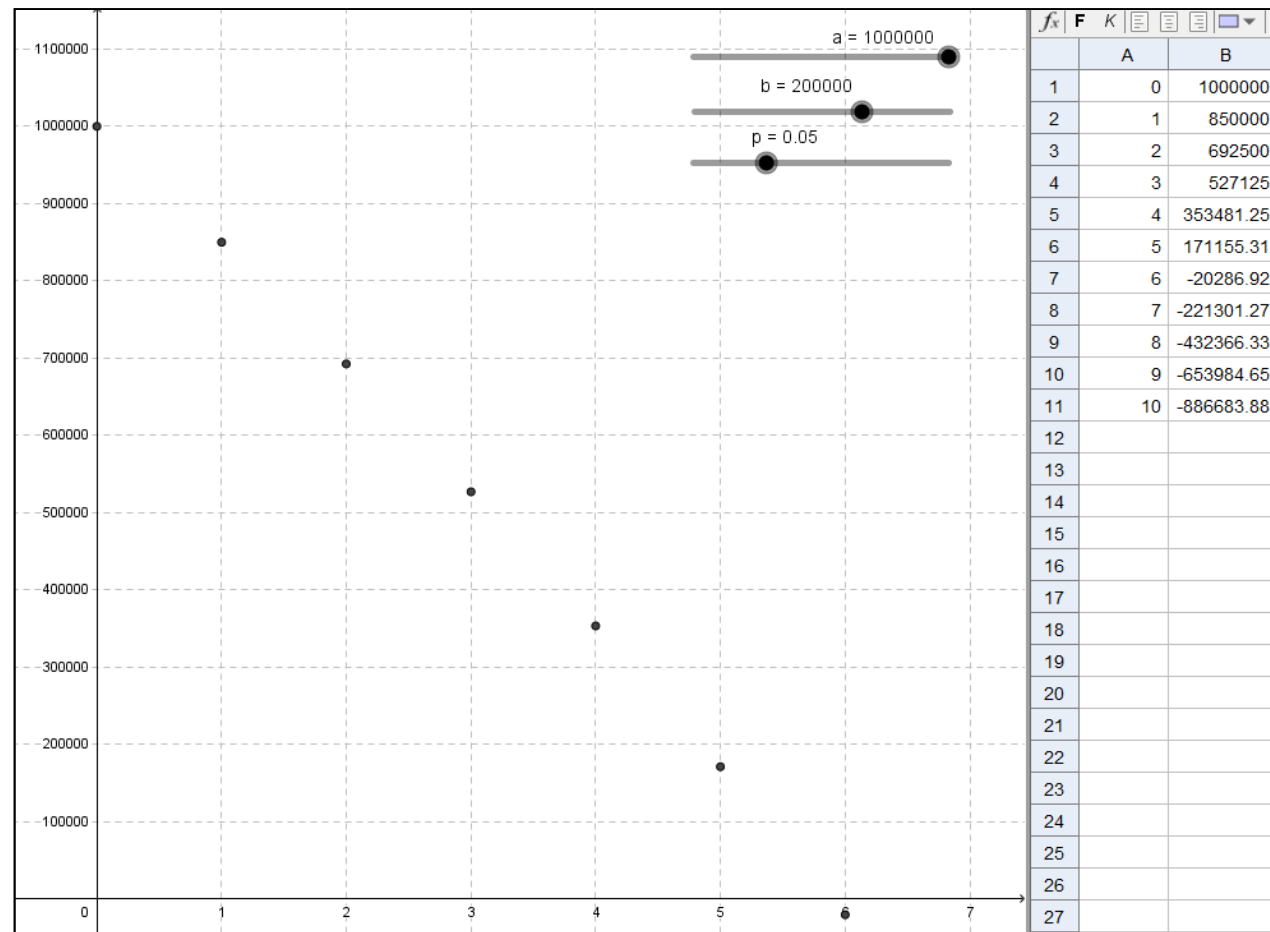
Letzte Rate am Ende des 6. Jahres:
179.713,08 €

Weiteres diskretes Modell

- ▶ Geben Sie einen Ausdruck an, der die jeweils offene Restschuld y_n explizit ausdrückt.

$$y_n = 4000000 - 3000000 \cdot 1,05^n$$

Weiteres diskretes Modell



Weitere diskrete Modelle

Wirkung der Parameter a und b

	$0 < a < 1$	$a > 1$
b > 0	<p>Lässt man n gegen unendlich gehen, so erhält man:</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a^n y_0 + b \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a} \right) = \frac{b}{1 - a}$ <p>In diesem Fall gibt es eine Schranke, die nicht überschritten wird. $\frac{b}{1 - a}$ wird Wachstumsgrenze W genannt.</p>	<p>Betrachtet man die explizite Form und lässt n gegen unendlich gehen, so wird y_n immer größer. Es liegt ein unbeschränktes Wachstum vor.</p>
b < 0	<p>Da beide Parameter eine Abnahme bewirken, wird die Größe y_n ab einem bestimmten n den Wert 0 annehmen.</p>	<p>Hier sind drei Verhaltensmuster möglich:</p> <p>$y_1 > y_0 \Rightarrow$ unbeschränktes Wachstum</p> <p>$y_1 = y_0 \Rightarrow$ der Bestand verändert sich nicht</p> <p>$y_1 < y_0 \Rightarrow y_n$ wird ab einem bestimmten n den Wert 0 annehmen</p>

Diskretes beschränktes Modell

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b \quad (0 < a < 1, b > 0)$$

Eine lineare Differenzengleichung der Form $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$ mit $0 < a < 1$ und $b > 0$ kann auf $y_{n+1} - y_n = k \cdot (W - y_n)$ mit $W = \frac{b}{1-a}$ und $k = 1 - a$ umgeformt werden.

W wird als Wachstumsgrenze und $W - y_n$ als Freiraum bezeichnet.

Die Differenz $y_{n+1} - y_n$ ist direkt proportional zur Differenz $W - y_n$.

Diskretes beschränktes Modell

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b \quad | -y_n$$

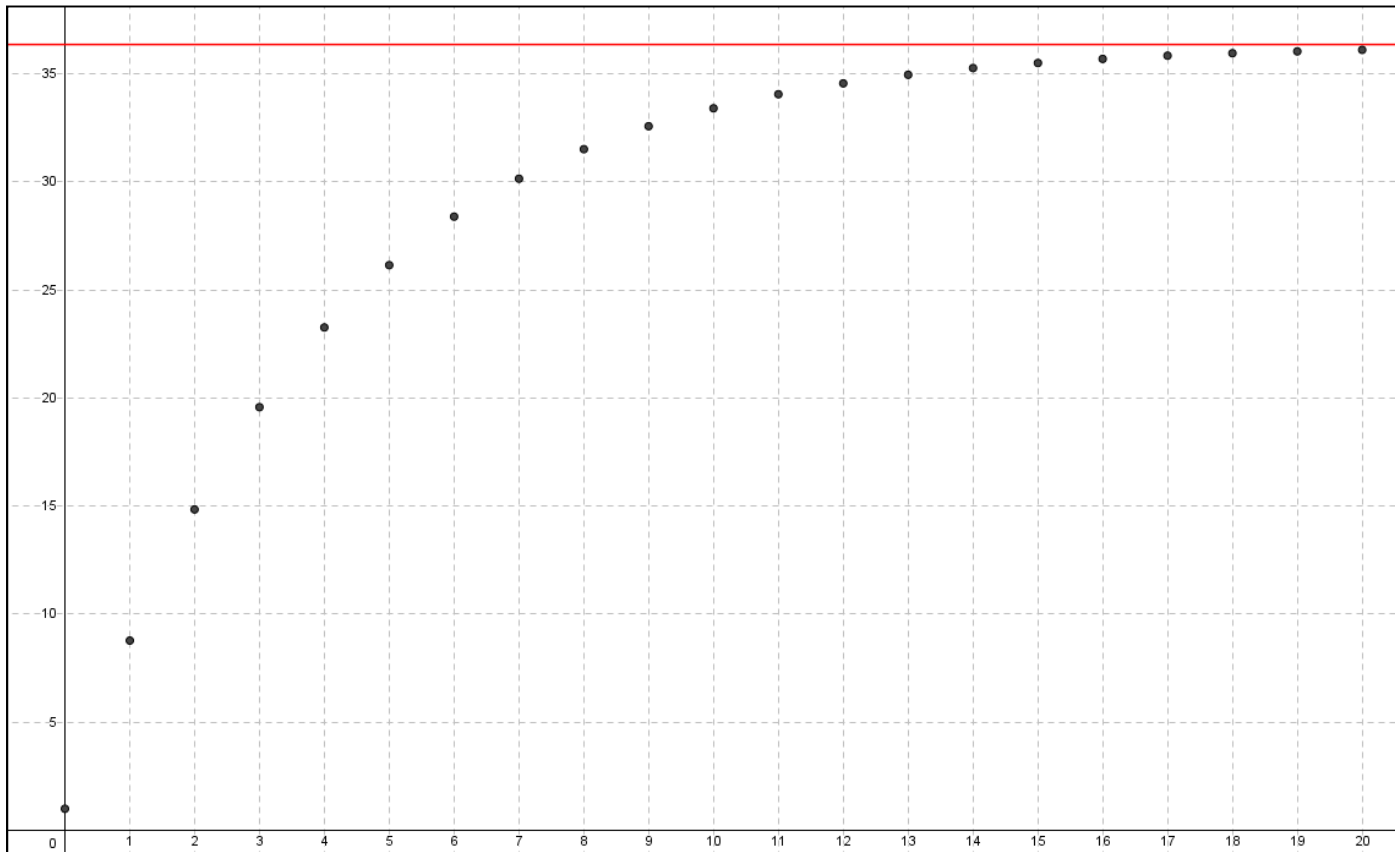
$$y_{n+1} - y_n = y_n \cdot (a - 1) + b = b - (1 - a) \cdot y_n$$

Durch Herausheben von $(1-a)$ erhält man:

$$y_{n+1} - y_n = (1 - a) \cdot \left(\frac{b}{1-a} - y_n \right)$$

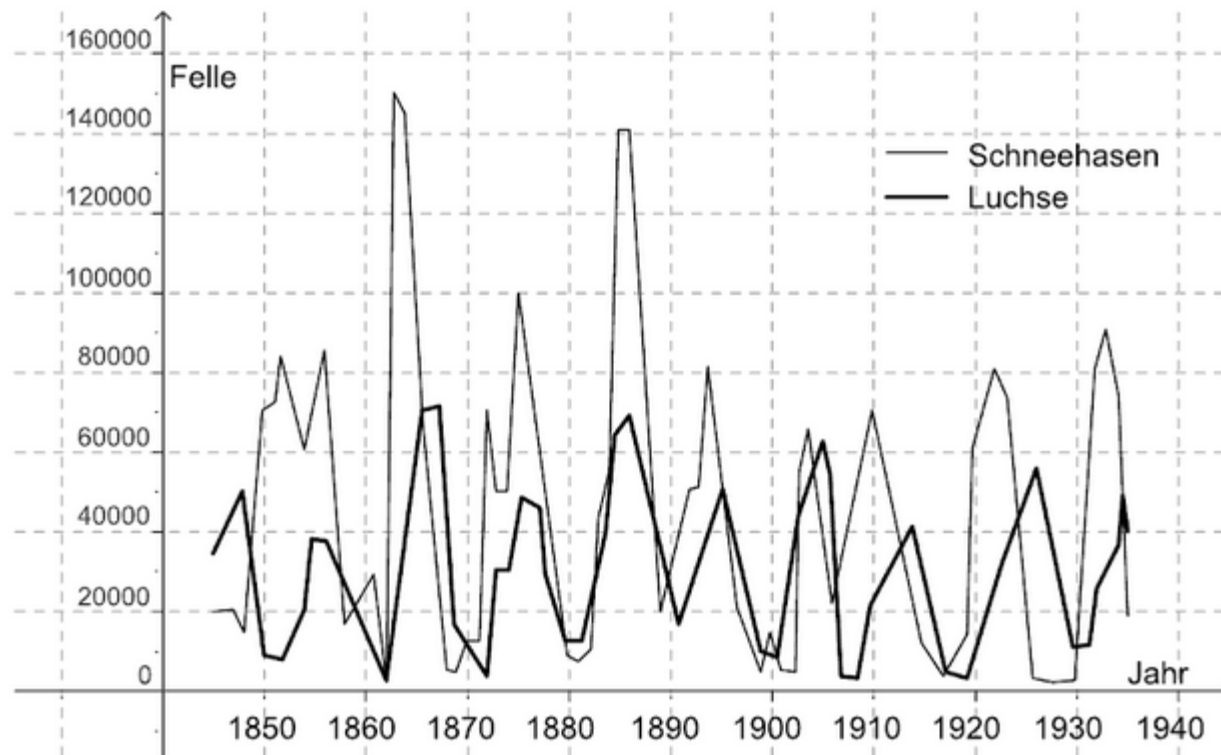
$$y_{n+1} - y_n = (1 - a) \cdot (W - y_n)$$

Diskretes beschränktes Modell



Räuber–Beute–Modell (Lotka–Volterra–Modell)

Räuber-Beute-Modell (Aufzeichnung der Hudson's Bay Company)



Räuber–Beute–Modell (Lotka–Volterra–Modell)

Modellannahmen:

- ▶ Hasen vermehren sich in Abwesenheit der Luchse exponentiell; Luchse sterben ohne das Vorhandensein von Hasen exponentiell.
- ▶ Der Jagderfolg soll proportional zum Produkt aus Hasenanzahl und Luchsanzahl sein.
- ▶ Hasen sind die einzige Nahrung von Luchsen und werden auch umgekehrt nur von Luchsen gefressen.

Räuber–Beute–Modell (Lotka–Volterra–Modell)

Mathematisches Modell von Differentialgleichungen

$$\frac{dH(t)}{dt} = a \cdot H(t) - c \cdot H(t) \cdot L(t)$$

$$\frac{dL(t)}{dt} = -b \cdot L(t) + d \cdot H(t) \cdot L(t)$$

Räuber–Beute–Modell (Lotka–Volterra–Modell)

Mathematisches Modell von Differentialgleichungen

$H(t)$... Anzahl der Hasen zum Zeitpunkt t

$L(t)$... Anzahl der Luchse zum Zeitpunkt t

a ... Fortpflanzungsfaktor der Beutetiere (0,05)

b ... Todesfaktor der Beutetiere (0,03)

c ... Reißfaktor (0,001)

d ... Fortpflanzungsfaktor der Räuber (0,0002)

a, b, c, d ... Konstante (positiv)

Räuber–Beute–Modell (Lotka–Volterra–Modell)

Mathematisches Modell von Differenzengleichungen

$$H_{t+1} = (1 + a) \cdot H_t - c \cdot H_t \cdot L_t$$

$$L_{t+1} = (1 - b) \cdot L_t + d \cdot H_t \cdot L_t$$

Räuber-Beute-Modell (Lotka-Volterra-Modell)

